Des nombres entiers aux nombres décimaux : quelles pistes de conceptualisation pour l’apprentissage ?

Jean-François CHESNÉ

Centre national d’étude des systèmes scolaires

Introduction

- Une approche **didactique** (+ historique / épistémologique)…
- … En continuité avec l'approche **psychologique**
  - **Importance du langage** (et plus particulièrement des expressions orales)
  - **Difficultés liées au code**
  - Importance de la **cardinalité** puis de l'**ordinalité** (comparaison) comme prédictives des apprentissages ultérieurs
- À l'échelle internationale :
  - Près de 75 % des élèves savent effectuer des opérations avec des **nombres entiers** (PASEC, 2019)
  - Moins de 40 % des élèves savent effectuer des opérations avec des **nombres décimaux** (PASEC, 2019)
  - Des difficultés persistantes chez les élèves (Steinle & Stacey, 2004) et même chez les adultes (OCDE, 2016) → **des difficultés davantage liées à l'objet et à son apprentissage** qu'à l'enseignement

Plan de la présentation

- Pourquoi s’intéresser aux nombres décimaux ?
- Comment construire les nombres décimaux ?
- Quelles continuités et quelles ruptures avec les nombres entiers ?
- Quelles pistes pour la conceptualisation des nombres décimaux ?

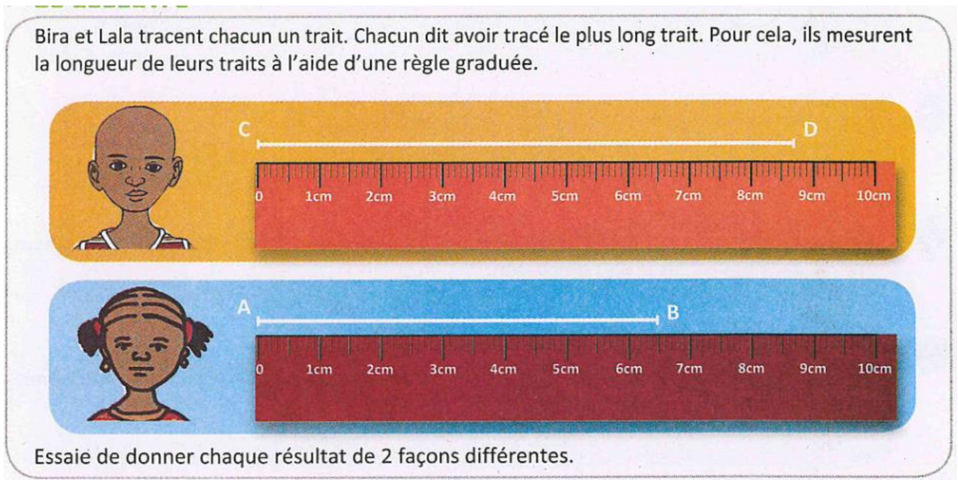
Pourquoi s'intéresser aux nombres décimaux ?

- De nouveaux nombres pour les élèves :
  - Usage dans la vie courante : mesures de grandeurs
  - **Prolongement de la pensée arithmétique** : une nouvelle étape vers la conceptualisation des nombres
- Des nombres récents dans l'histoire des mathématiques
  → Un **long processus historique** : un lien avec l'existence de difficultés d'apprentissage pour les élèves ?

Comment construire les nombres décimaux ? (1/4)

Trois possibilités :

1. Un **changement d'unité** qui induit le changement de nature des nombres dans le système décimal de mesure des grandeurs (approche privilégiée par les manuels Didactikos – Grapin, Mounier & Priolet, à paraître)



Le trait de Lala mesure 6 cm 5 mm ou encore 6,5 cm
Le trait de Bira mesure 8 cm 7 mm ou encore 8,7 cm

Manuel Didactikos CE2, p. 78

Comment construire les nombres décimaux ? (2/4)

2. La mesure d'une grandeur peut ne pas correspondre à un nombre entier d'unités → introduction des **partages successifs de l'unité**
   - Passage à des **fractions décimales** (dénominateurs = puissances de 10) puis à l'**écriture décimale**

Avec les nombres entiers, on peut compter plein de choses :
des moutons, des bonbons, des maisons, etc.
Et puis un jour, un homme a voulu mesurer une ficelle avec un bâton.

Il reporte plusieurs fois le bâton sur la ficelle, mais arrivé au bout, ça ne tombe pas juste !
La ficelle mesure entre … bâtons et … bâtons.

Alors, il décide de faire sur son bâton des entailles qui le partagent en 10 parties égales.
Puis il dit : « Ma ficelle mesure … bâtons et … dixièmes de bâtons. »

Il y a un peu plus de 400 ans, un comptable hollandais qui s'appelait Stevin se dit que ce serait bien d'écrire tout ceci plus simplement, en un seul morceau.

Il a proposé d'écrire 8 ⓪ 9 ① 3 ② *pour* $8 + \frac{9}{10} + \frac{3}{100}$.

Il a fallu attendre encore 200 ans (la Révolution française) pour qu'apparaisse enfin la ***virgule*** *et qu'on écrive 8,93.*

Manuel Hélice 6e, p. 29 et 30

Comment construire les nombres décimaux ? (3/4)

3. La **résolution de problèmes** avec des nombres entiers peut ne pas avoir de solution si on s’en tient à des nombres entiers

Pour réaliser une canalisation de **36** m avec 4 tuyaux de même longueur, quelle doit être la longueur de chaque tuyau ?

→ 36 m ÷ 4 = 9 m

vs

Pour réaliser une canalisation de **38** m avec 4 tuyaux de même longueur, quelle doit être la longueur de chaque tuyau ?

→ 38 m ÷ 4 = ?

38	4
- 36	9,5
20	
- 20	
0	

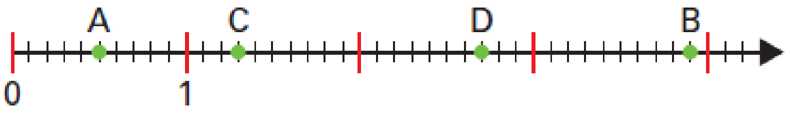
Comment construire les nombres décimaux ? (4/4)

L'utilisation de la **droite graduée** (« ligne numérique ») : une notion unificatrice et généralisatrice (Robert, 1998) pour la conceptualisation des nombres

- Attestée pour les **nombres entiers** (Fayol, 2015)
- Proposition implicite des concepts de **continuité** et de **densité** : un nombre décimal est associé de façon unique à un point sur une droite graduée (orientée)
- **Changement de registre** de représentation comme condition nécessaire de la conceptualisation (Duval, 2018)

1 À quelle fraction de l'unité correspond l'écart entre deux petites graduations successives ?

2 Donner les abscisses des points A, B, C et D en lettres, puis avec une écriture fractionnaire, puis avec une écriture à virgule.



Manuel Hélice 6e, p. 31

Quelles continuités par rapport aux nombres entiers ?

- Une **écriture unifiée** à un symbole près : « une numération qui pense toute seule » (Bachelard)
  - → 4 a la même valeur relative par rapport à 2 dans 24 et dans 2,4 : le chiffre 2 vaut 5 fois le chiffre 4
- Des **techniques opératoires proches** (application des algorithmes à quelques ajustements près)
  - → Application de l'algorithme ≠ compréhension conceptuelle
- Mais des risques de comportement « **d'expert apparent** » (Roche & Clarke, 2006) : une réussite opérationnelle de certaines tâches peut masquer une conceptualisation déficiente (en France, voir par ex. Chesné & Fischer, 2015)

Quelles ruptures par rapport aux nombres entiers ?

- Un nombre décimal n’a **pas de successeur**
  - → Pas de nombre entier entre 1 et 2 ; une infinité de nombres décimaux entre 1 et 2
- Le nombre qui **s’écrit avec le plus de chiffres** n’est pas toujours le plus grand
  - → $2{,}174 < 2{,}18$ (alors que $2\ 174 > 218$)
- Quand on **multiplie** par un nombre décimal, on n’obtient pas toujours un nombre plus grand
  - → $2 \times 0{,}5 = 1 < 2$
- Quand on **divise** par un nombre décimal, on n’obtient pas toujours un nombre plus petit
  - → $2 \div 0{,}5 = 4 > 2$

Exemples de *misconceptions* des nombres décimaux chez les élèves (1/2)

Deux principales catégories de « conceptions erronées » chez les élèves (Steinle, 2004) :

- Le traitement des **nombres décimaux comme couples de nombres entiers**
  - Dans la comparaison : le nombre décimal qui a le plus de chiffres après la virgule est le plus grand (8,75 > 8,9 car 75 > 9)
  - Dans le calcul : des erreurs comme 4,3 + 1,7 = 5,10 ou 0,5 × 3 = 0,15

→ Cette conception peut se trouver **renforcée par l'enseignement**

Un nombre décimal est un nombre qui contient une partie entière et une partie décimale séparées par une virgule.
Dans **8,75** : **8** est la partie entière, **75** la partie décimale.

Manuel Didactikos CM1, p. 102

Exemples de *misconceptions* des nombres décimaux chez les élèves (2/2)

2. « Plus c'est long, plus c'est petit » : le nombre décimal qui a le plus de chiffres après la virgule est le plus petit

→ Une procédure dont la **proportion tend à augmenter avec le temps**, par ex. à cause de confusions…

- Avec les **fractions** : 0,25 < 0,2 comme 1/25 < 1/2
- Avec les **nombres négatifs** : 0,25 < 0,2 comme – 25 < - 2

Conclusion (1/3) : quel(s) pont(s) avec l'enseignement ?

- Étude sur les outils pour l'enseignement (Grapin, Mounier & Priolet, à paraître) : l'enseignement des nombres décimaux est antérieur à celui des fractions (activités numériques, manuels de la collection Didactikos)
- Curriculum d'éducation de base (2e étape) :

  À la deuxième étape, les nombres décimaux sont introduits. À ce niveau ils doivent d'abord apparaître comme des **nombres utiles pour résoudre des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de solutionner de façon satisfaisante** : **problèmes de partage, de mesure de longueurs et d'aires, de repérage d'un point sur une droite**. La géographie, les sciences et l'Éducation physique et sportive (l'EPS) offrent de belles occasions de mettre en évidence l'utilité de tels nombres de tels nombres.
- **Pas de travaux scientifiques montrant que l'une des deux autres méthodes prévaut** (Nunes & Bryant, 2009 ; Tian & Siegler, 2018)

Conclusion (2/3) : quelles pistes pour favoriser la conceptualisation des nombres décimaux ?

Importance du **lien entre nombres décimaux** et…

- **Langage oral** :
  - Travaux en **psychologie** (Fayol)
  - Passage trop rapide à l'expression « deux virgule quatre » et à l'écriture « 2,4 » → **déficit de compréhension conceptuelle** visible dans des tâches de comparaison, mais potentiellement invisible pour les tâches de calcul nécessitant uniquement des connaissances procédurales
- **Fractions** :
  - **Dissymétrie** dans l'expression « nombres décimaux et fractions »
  - Évaluations nationales, **France** : confusion entre 1/4 et 1,4 et entre 1/4 et 0,4 (Chesné, 2014) ; entre 2/1 et 2,1 (Dehaene *et al*., 2023)
  - **PASEC** : difficultés analogues relevées

Conclusion (3/3) : quelles pistes pour favoriser la conceptualisation des nombres décimaux ?

Mobilisation des **nombres décimaux** dans…

- Le calcul, en particulier le **calcul mental** :
  - **Articulation entre différents registres de représentation** : « plus qu'un simple moyen d'obtenir un résultat, le calcul est de plus en plus perçu comme une fenêtre ouverte sur la structure profonde du système de numération » (National Research Council, 2001)
- La **résolution de problèmes** :
  - Importance des **situations rencontrées par les élèves** qui font intervenir des nombres décimaux (Vergnaud, 1990)