Comment un enfant passe-t-il de l'intuition des quantités et des grandeurs aux traitements symboliques ?

Michel FAYOL

Université Clermont Auvergne et CNRS

Une situation et des objectifs

- Des **enfants dans un monde doté de quantités manipulables** et rempli de **symboles** → comment les enfants parviennent-ils à se les approprier ?
- **Précocité** des inégalités : importance du milieu socio-culturel et de la langue
- **Réduire les inégalités** :
  - → Commencer le plus tôt possible
  - → S'appuyer sur les données de la recherche : **espérer des améliorations si interventions précoces** ; court et moyen termes
  - → Prendre en compte la **spécificité des activités et objectifs** de l'école maternelle
- **Intervenir sur quoi ? Comment ? Quand ? Et pourquoi ?**

Les caractéristiques des enfants et leur évolution

Une question largement explorée, avec des faiblesses concernant les cultures non-occidentales

Les caractéristiques de l'enfant et de son évolution (Jordan *et al.*, 2022)

- Évolution : **intégration de deux dimensions**, la maturation (génétique et biologie) et la culture
- **Une trajectoire envisagée comme générale** :
  - Traitement des grandeurs et quantités non symboliques (petites jusqu'à 3 et 4, grandes au-delà)
  - Accès au **symbolique culturel** (noms de nombres et pratiques de dénombrement) et/puis au symbolique indo-arabe
  - Élaboration du système numérique indo-arabe (système de notation positionnelle, principe du successeur, base 10, etc.)
  - Fractions et décimaux
- **Des différences interindividuelles très fortes** :
  - Spécifiques à l'arithmétique
  - Dépendantes de capacités générales : langage, capacités spatiales, attention, mémoire de travail, etc.

Capacités spécifiques. Les fondations de l'arithmétique reposeraient sur trois dimensions en interaction continuelle au cours de l'évolution ; chacune contribuerait à l'apprentissage avec des poids différents (Devlin *et al*., 2022), et sans doute en fonction des incitations et expériences

Sens du nombre

Nombre

Connaissance des nombres entiers et de la chaîne verbale
Comptage verbal
Dénombrement des collections
Cardinalité
Reconnaissance des chiffres

Relations numériques

Relations entre nombres entiers
Comparaison de magnitude
Ordinalité
Ligne numérique

Opérations

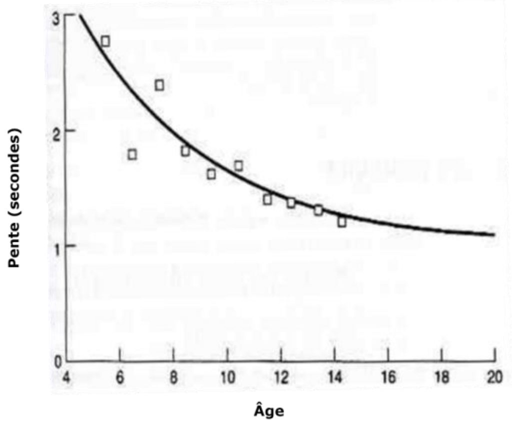
Arithmétique non verbale
Problèmes verbaux (histoires)
Composition/décomposition
Combinaison de nombres
Résolution de problèmes

Ces dimensions sont également à l'origine de différences interindividuelles (Cahoon *et al*., 2021) qui pourraient conduire à élaborer des profils d'évolution ; ces derniers pourraient servir de base aux interventions

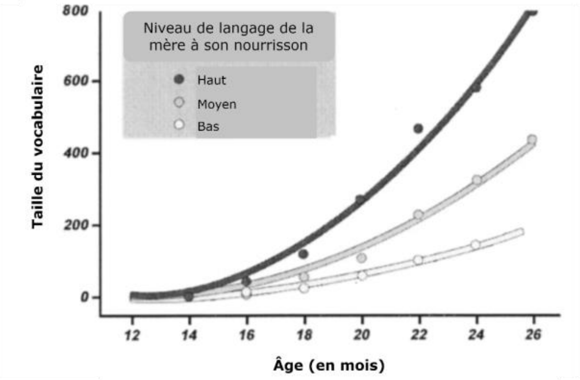
D'après Jordan *et al*., 2022

Des évolutions des capacités générales
(Gathercole *et al.*, 2004)

- La vitesse
- La mémoire à court terme (MCT) puis de travail (MDT)
- Le langage et les traitements symboliques
- Les fonctions exécutives (FE)
- Les dimensions émotionnelles, l'anxiété



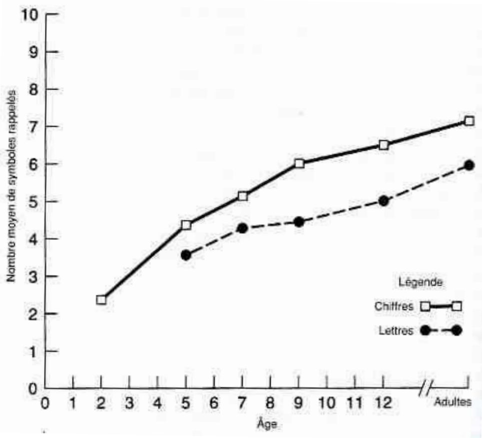
Les vitesses de réponse à des lettres ou chiffres ou à des formes géométriques **augmentent** en fonction de l'âge **indépendamment des connaissances** et des stratégies



Impact du **langage maternel** sur l'acquisition du langage (Ramey, 2004 ; Lervag, 2019 chez les très bas SES)

Empan verbal (= nombre maximum de termes que le sujet peut répéter immédiatement après présentation) :

- 2 items à 2 ans, 4 items à 5 ans, 6 items à 9 ans, niveau adulte à 11-12 ans
- Différences inter-individuelles dès 3 ans
- Maturation (*fonctions exécutives*), connaissances, stratégies : trois influences

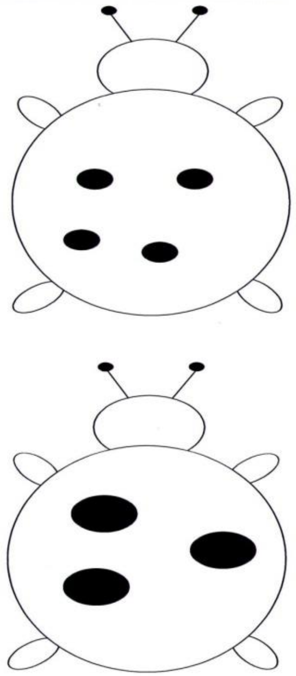


Un bref aperçu de l’évolution

De la biologie aux cultures

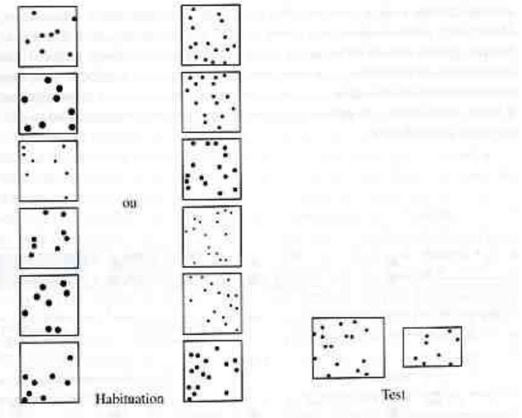
De l'intuition des quantités et des grandeurs aux premiers apprentissages culturels

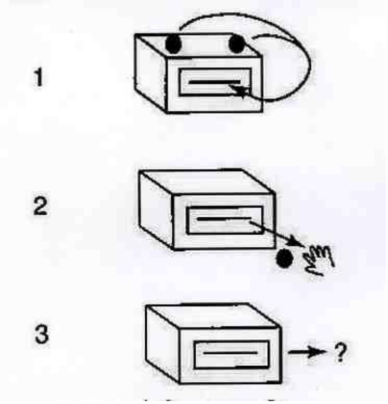
- Les capacités initiales des petits enfants reposent sur des traitements **analogiques** (largement perceptifs) **pré-verbaux et approximatifs** leur permettant des adaptations minimales
- Ces capacités évoluent sous l'influence conjuguée de la **maturation** et des exemples et sollicitations de l'**environnement physique, social et langagier**
  - → Cette évolution ne suffit pas à assurer l'apprentissage de la numération exacte (correspondance terme à terme – CTT et cardinalité – principe du successeur) ; **la CTT semble jouer un rôle majeur** (Izard *et al*., 2009)
  - → Vers la cardinalité : indépendante des formes, couleurs, dispositions spatiales des collections d'objets
- Le **premier apprentissage culturel** consiste en l'acquisition des **associations entre symboles culturels** (en général les noms de nombres) **et les quantités**
  - → Il commence par les petites quantités (**subitizing**) : lent et difficile (entre 2 et 4/5 ans)
  - → Il s'étend ensuite par **comptage-dénombrement** : évalué par « dire combien d'éléments comporte une collection » *versus* « donner un nombre précis d'objets » (Sarnecka, 2015)



Les nouveau-nés disposent de deux capacités de traitement des petites et des grandes quantités

- **Discriminer** les grandeurs et les quantités
  - → Les petites entre 1 et 2 ; 1 et 3 ; moins clairement entre 2 et 3
  - → Les grandes quand le rapport entre elles est élevé (entre 8 et 24 à la naissance ; entre 16 et 24 ensuite ; puis le rapport s'affine)
- **Comparer** plus tard (vers 10/12 mois ?) les grandeurs : plus ou moins (grand/petit ; lourd/léger ; etc.)
- **Transformer** les grandeurs et quantités : rendre pareil ; faire plus, faire moins ; plus grand, plus petit ; etc.





Un aperçu de la diversité des systèmes (codes) (1/2)

Collins *et al.*, 2024 ; Franck *et al.*, 2008 ; Gordon, 2004 ; Mesquita *et al.*, 2023 ; Saxe, 2014 ; Vandendriessche, 2018

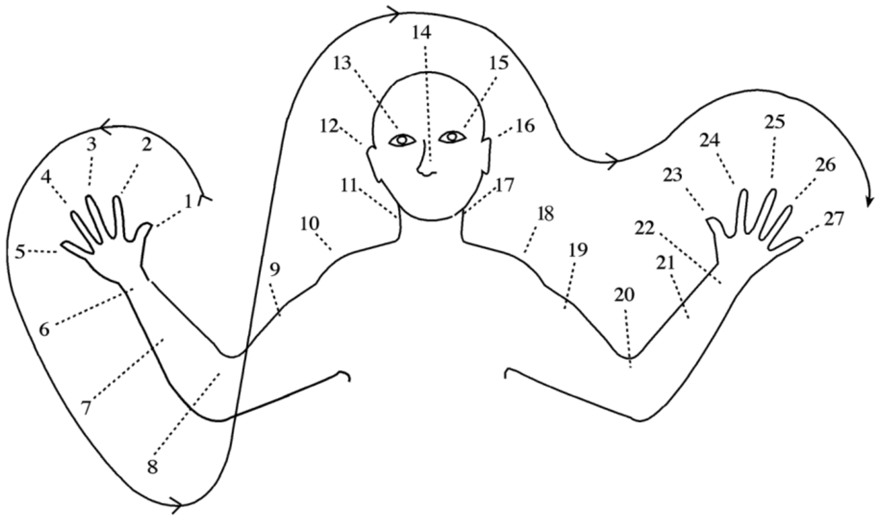
- Certaines cultures **ne requièrent pas l'usage des nombres et ne disposent pas de systèmes numériques** : chez les Pirahä (Franck *et al*, 2008 ; Gordon, 2004), absence d'usage des nombres car ils ne sont pas utiles à leur vie
- D'autres utilisent des noms de **nombres de manière non précise** : en Xirianá, *mõle* signifie « un » et possiblement « deux », *yaluku pèk* signifie une quantité entre deux et cinq et *yalami* signifie quelque chose plus que deux
- Il existe des systèmes **multibases**, même quand les doigts sont utilisés ; l'introduction de la monnaie aurait entraîné de nouvelles formes de représentation numérique (Saxe, 2014)

Un aperçu de la diversité des systèmes (codes) (2/2)

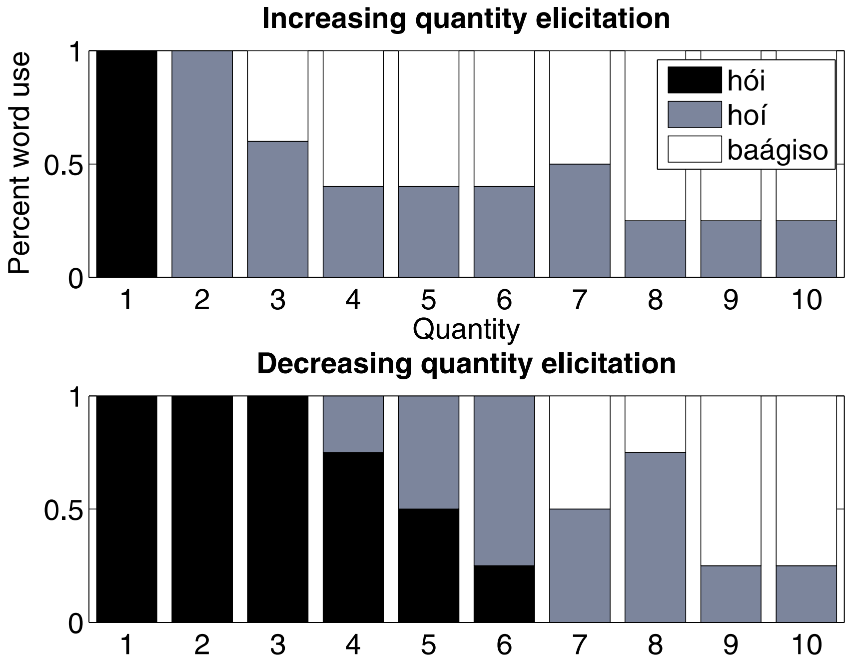
Franck *et al.*, 2008 ; Gordon, 2004 ; Mesquita *et al.*, 2023 ; Saxe, 2014 ; Vandendriessche, 2018

- L'élaboration de systèmes (codes) a demandé du temps et a conduit à des errements dans l'utilisation des symboles : le même symbole ● peut correspondre à différentes quantités de différentes marchandises
  - → Par exemple, un simple ● peut renvoyer à 10 moutons dans un système, 6 lots d'orge dans un autre ou 18 lots de terrain dans un troisième
- **L'évolution des codes se caractérise par un passage lent des codes analogiques** (encoches sur des branches, doigts, dessins d'entités diverses comme des animaux) **à des codes abstraits** (noms de nombres, chiffres)
- L'apprentissage du code indo-arabe, devenu universel, suivrait la **même trajectoire** quelles que soient les langues (Copping *et al.*, 2024)

Des systèmes symboliques et leur utilisation (O'Shaughnessy, 2021)



Système Oksapmin
(Saxe & Esmonde, 2005)



Relativité des nombres en Pirahä
(Franck *et al*., 2008)

Les effets potentiels des codes symboliques – dont le langage

Purpura & Reid, 2016 ; Salillas & Carreiras, 2014 ; Sarnecka *et al.*, 2007

Trois dimensions :

1. La **relation avec le langage** (associé au milieu social et aux activités socio-culturelles) est attestée : les enfants de milieu social favorisé ont de meilleures performances aux codes symboliques, même si l'apprentissage des premiers noms de nombres lent et difficile pour tous (Pagel, 2017 ; Sarnecka, 2015)
2. Les expressions langagières **associées à l'arithmétique** (Purpura & Reid, 2016) sont les plus influentes ; voir l'importance des activités au sein des familles (jeux, commerce, etc. – Andres *et al.*, 2012)
3. L'apprentissage des **associations entre chiffres indo-arabes (CA) et quantités (Q)** (et représentation spatiale – la ligne numérique ?) est l'objectif
   - → À la fois Q ⇒ CA (dire combien, dénombrer) et CA ⇒ Q (donner n) (O'Rear *et al.*, 2014)
   - → « Mets deux poissons dans le bocal »

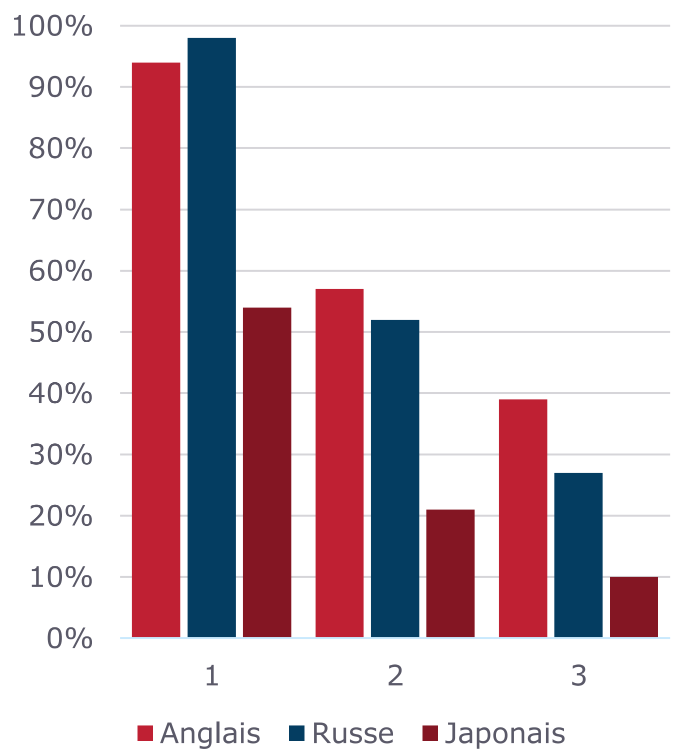
Mots clés
Enlever
Plus proche
Sous
Premier (dans une file)
Un petit peu
Loin
La plupart
Plus
Sous
Devant
Milieu
Fin
Dernier
Le moins
Avant
Moins

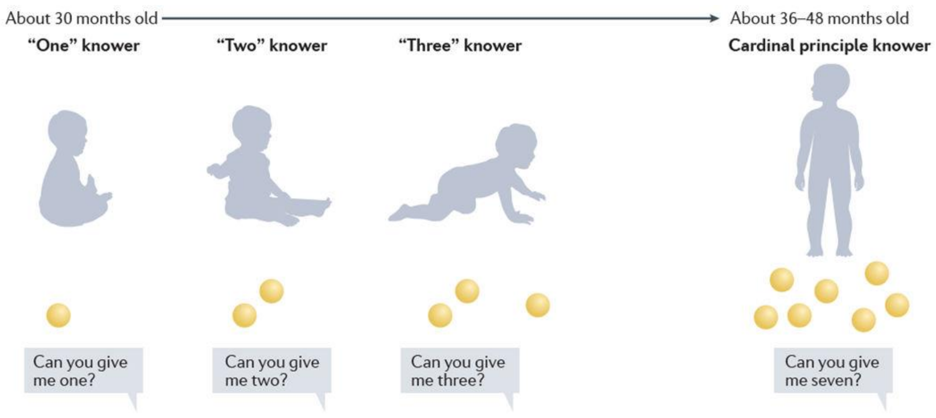
Le rôle potentiel du langage

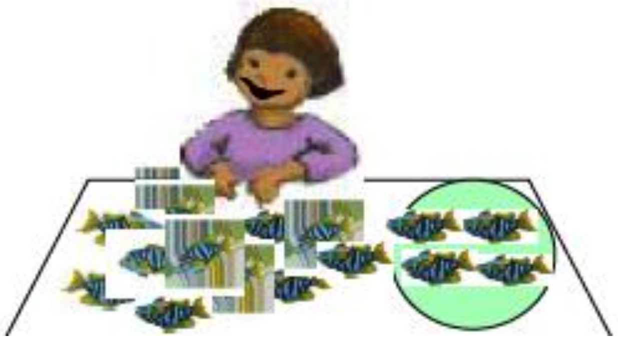
Purpura & Reid, 2016 ; Salillas & Carreiras, 2014 ; Sarnecka *et al.*, 2007

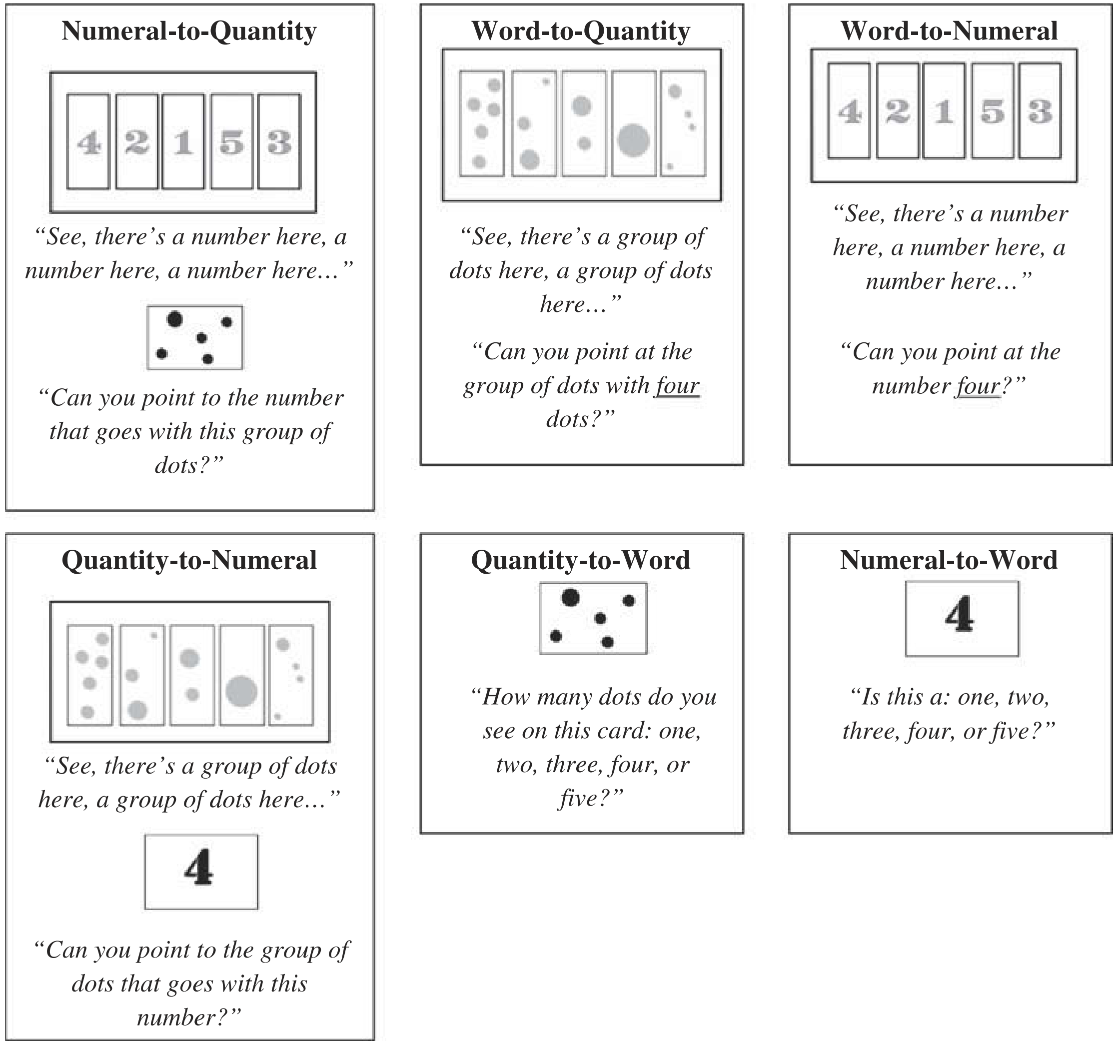
- La distinction linguistique entre singulier et pluriel pourrait être à l'origine de l'acquisition par les enfants jeunes des mots « un », « deux » et « trois »
  - Langues anglaise, russe (dans ces deux langues, la distinction singulier/pluriel est marquée) et japonaise (qui ne marque pas cette distinction)
  - Une étude comparative de l'acquisition de ces termes par ces enfants et des habiletés de dénombrement (donner x objets et dénombrer x objets) met en évidence des différences de performance et de trajectoires d'acquisition (Sarnecka *et al.*, 2007)
- **Les premières dénominations des quantités conservent-elles un impact à long terme ?**

Pourcentages d'enfants ayant acquis la signification précise d'un mot de nombre donné



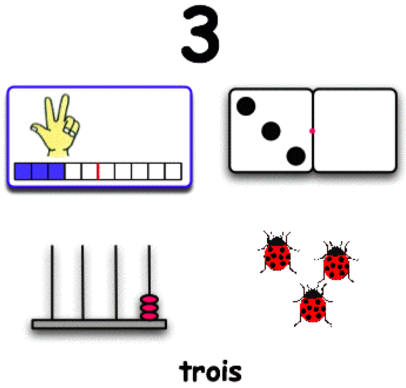

About 30 months old
About 36–48 months old
"One" knower
"Two" knower
"Three" knower
Cardinal principle knower
Can you give me one?
Can you give me two?
Can you give me three?
Can you give me seven?




Numeral-to-Quantity
4 2 1 5 3
"See, there's a number here, a number here, a number here…"
"Can you point to the number that goes with this group of dots?"
Word-to-Quantity
"See, there's a group of dots here, a group of dots here…"
"Can you point at the group of dots with four dots?"
Word-to-Numeral
4 2 1 5 3
"See, there's a number here, a number here, a number here…"
"Can you point at the number four?"
Quantity-to-Numeral
"See, there's a group of dots here, a group of dots here…"
4
"Can you point to the group of dots that goes with this number?"
Quantity-to-Word
"How many dots do you see on this card: one, two, three, four, or five?"
Numeral-to-Word
4
"Is this a: one, two, three, four, or five?"

Diversité des représentations et des codes : vers l'intervention pédagogique

- Le **matériel concret** permet les manipulations et la mobilisation de plusieurs modalités : visuelle, tactile, auditive, etc.
- Le **matériel analogique** conserve une **ressemblance partielle** avec les entités concrètes : dés, dominos, réglettes, etc. → codage et interprétation relativement faciles
- Les **symboles** sont abstraits (en fait, arbitraires) : ils doivent **évoquer les quantités exactement et rapidement**
  - → Les quantités doivent les activer par reconnaissance ou dénombrement
  - → Automatisé chez les adultes, pas chez les enfants

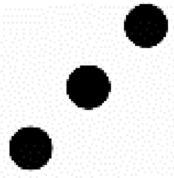


Le traitement des symboles (1/2)

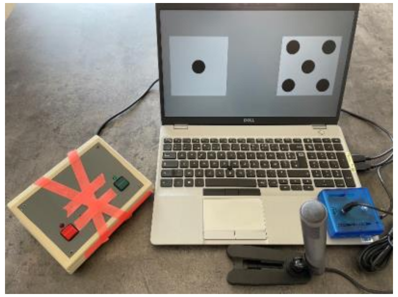
- Les symboles ont beaucoup d'avantages : ils permettent d'**évoquer** des entités concrètes (« tel individu ») ou abstraites (la catégorie des chiens), des **quantités** ou des **mesures**
- Le maintien en mémoire immédiate (MCT ou MT) se trouve **facilité et amplifié** ; passage du visuo-spatial au verbal ; attention aux **limites très fortes chez les enfants**
- Le passage **des entités aux symboles** (dénomination, reconnaissance) et **des symboles aux entités** (évocation) constitue un **apprentissage** ; le maintien en mémoire nécessite que le **coût en attention** ne soit pas trop élevé
- Que sait-on de **l'automaticité** (temps de traitement, variable continue) des traitements des quantités non-symboliques et symboliques chez les enfants ?

Le traitement des symboles (2/2)

- **Ce ne sont pas les quantités qui posent problème**, mais leur **codage** et la **manipulation** des codes ; attesté pour les troubles du calcul (Rousselle & Noël, 2007)
  - → Essayez de résoudre XXXIV × XXIII ou CXXIX – XXXVIII…
- Sources principales de difficulté :
  - → Le **code** : un apprentissage verbal ou visuo-spatial (CA), discriminer les noms ou signes (Benoit *et al*., 2013 ; Fuson, 1988)
  - → Sa **signification** : mise en relation précise entre symboles et quantités
  - → Sa **vitesse d'accès** (dans les deux sens Q ⇒ CA et CA ⇒ Q)
  - → Sa **manipulation**

Doigts canoniques	Dés canoniques	Doigts non canoniques	Dés non canoniques	Chiffres arabes
				3

1. Entraînement à la compréhension de « **plus** » et « **moins** »
2. Présentation des différents stimuli et **dénomination** avec correction si erreur
3. Aléatoirement, **comparaison de toutes les quantités** de 1 à 5 (1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, 4-5) **sous toutes les conditions** (doigts, dés, chiffres)



Un bilan relatif à l'automatisation
(Fayol *et al.*, en préparation)

- Les **vitesses de traitement s'accélèrent de la GSM à la fin du CP** chez les enfants ; elles sont très rapides chez les adultes
- Les **numérosités** (représentations **analogiques**, ici canoniques sous format de **dés**) sont plus rapidement traitées par les élèves de la GSM à la fin du CP ; pas vrai pour les doigts alors que… ; pas vrai chez les adultes
- Les **comparaisons simples** (de 1 à 5) de symboles, très rapides chez les adultes, sont plus lentes (2 fois plus lentes) en fin de CP (3 fois plus lentes en milieu de GSM)
- **Il faut attendre le CE2** (avec des différences interindividuelles fortes) pour observer une **automatisation des traitements des symboles** (c'est-à-dire l'évocation automatique de la magnitude – Girelli *et al.*, 2000)
- La question de l'automaticité des résolutions d'opérations reste à discuter

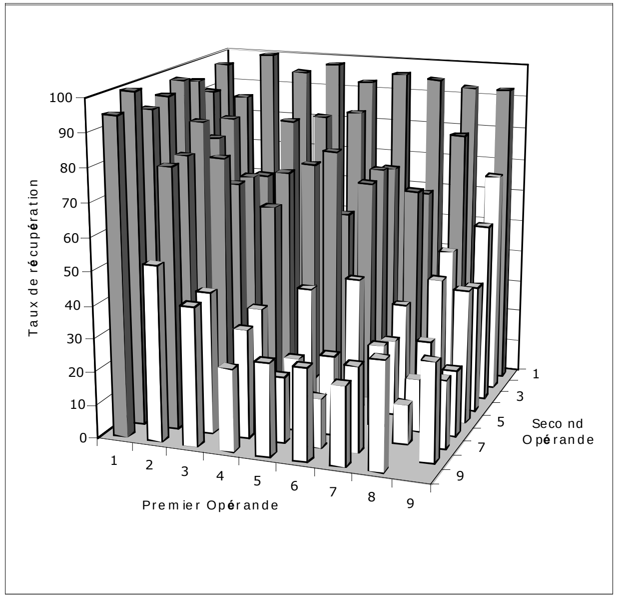
Les propriétés des opérations : combiner les symboles

Un domaine peu exploré et pourtant…

Les opérations arithmétiques : formaliser

Ischebeck *et al.*, 2023 ; Nunes, 2023 ; Thevenot *et al.*, 2023 ; Zamarian *et al.*, 2009

- Des **savoirs** : tables de multiplications, connaissances des algorithmes, etc.
- Des **savoir-faire** : opérations posées (avec ou sans retenue), calcul mental, etc.
  - → **Utiliser et combiner des symboles suivant des règles** (addition, soustraction, multiplication, etc.) plutôt que de réaliser des transformations (ajouter, enlever, partager) portant sur les quantités concrètes correspondant à ces symboles
- Des **propriétés** : commutativité, inversion, successeur/prédécesseur, associativité, etc.
  - → La **manipulation réglée des symboles aboutit au même résultat que l'application des transformations**
  - → Elle permet de découvrir la **« liberté » relative de manipulation des symboles** : **propriétés des opérations** (inversion, commutativité, etc.)
- Les bilans internationaux et nationaux font apparaître que **les propriétés ne sont généralement pas abordées et travaillées alors qu'elles seraient fondamentales pour aborder l'algèbre**



Performances à 9/10 ans – additions
(Barrouillet & Lépine, 2005)

Propriétés des opérations : du CM2 à la 5e
(Robinson *et al.*, 2018)

Addition and subtraction		Multiplication and division	
Identity			
4 – 0 = ___	24 – 0 = ___	3 ÷ 1 = ___	16 ÷ 1 = ___
9 – 0 = ___	28 – 0 = ___	4 ÷ 1 = ___	28 ÷ 1 = ___
Negation			
3 – 3 = ___	21 – 21 = ___	2 ÷ 2 = ___	18 ÷ 18 = ___
8 – 8 = ___	27 – 27 = ___	5 ÷ 5 = ___	27 ÷ 27 = ___
Commutativity			
4 + 5 = 5 + ___	6 + 23 = 23 + ___	8 × 2 = 2 × ___	3 × 9 = 9 × ___
9 + 2 = 2 + ___	5 + 28 = 28 + ___	7 × 3 = 3 × ___	6 × 8 = 8 × ___
Equivalence			
6 + 3 + 5 = 6 + ___	5 + 9 + 3 = 5 +___	5 × 2 × 3 = 5 × __	6 × 5 × 3 = 6 × __
4 + 2 + 7 = 4 +___	8 + 7 + 6 = 8 +___	3 × 4 × 7 = 3 × __	4 × 8 × 2 = 4 × __
Inversion			
2 + 5 – 5 = ___	3 + 24 – 24 = ___	6 × 2 ÷ 2 = ___	4 × 7 ÷ 7 = ___
6 + 3 – 3 = ___	8 + 26 – 26 = ___	3 × 5 ÷ 5 = ___	9 × 8 ÷ 8 = ___
Associativity			
5 + 4 – 2 = ___	2 + 29 – 27 = ___	2 × 8 ÷ 4 = ___	5 × 6 ÷ 2 = ___
3 + 9 – 6 = ___	7 + 25 – 22 = ___	4 × 6 ÷ 3 = ___	7 × 9 ÷ 3 = ___

Résultats

- **Opérations** : les additions et soustractions (76 %) sont mieux résolues que les multiplications et divisions (62 %)
- **Concepts** : identité (95 %) et négation (91 %) sont mieux résolues que commutativité (71 %) et inversion (72 %), elles-mêmes mieux résolues qu'associativité (54 %) et équivalence (31 %)
- **Niveaux** : CM2 (63 %) font moins bien que 6ᵉ (69 %) et 5ᵉ (75 %)
  - → Les différences de performance entre additions / soustractions et multiplications / divisions s'amenuisent avec le niveau : 19 p.p. en CM2, 13 p.p. en 6ᵉ et 9 p.p. en 5ᵉ
- **Stratégies** : celles reposant sur les concepts sont plus fréquentes
  - → Avec les additions / soustractions (64 %) qu'avec les multiplications / divisions (52 %)
  - → Avec l'identité (92 %) et la négation (90 %) qu'avec la commutativité (73 %), l'équivalence (51 %), l'inversion (30 %) et l'associativité (14 %)

Un bilan rapide

- Relativement peu de travaux concernant la **formalisation** et son intérêt pour résoudre les problèmes arithmétiques, pour effectuer les calculs mentaux et pour raisonner sur des équations
- Encore moins de travaux sur l'**apprentissage de la formalisation**, sa stabilité et sa généralisation (mais voir Ching & Nunes, 2017 ; Prather & Alibali, 2009 ; Torbeyns *et al.*, 2016 ; Vlassis, 2008)
- Le signe le plus étudié : **égal (=)**
  - Les deux membres de l'égalité représentent **la même valeur** (Matthews, 2012)
  - Interprétation rare et tardive par les élèves ; **l'interprétation dominante est opérationnelle** (compter ; dire combien)
  - Les manuels présentent de manière **dominante (souvent exclusive) le format** $\boldsymbol{a + b = c}$ (McNeil *et al.*, 2006 ; Reys *et al.*, 2004)
  - Les enseignants n'utilisent le plus souvent (ou longtemps) **que ce seul format** (Rittle-Johnson *et al.*, 2011) ; malgré les formations, les pratiques restent très traditionnelles (Silla *et al.*, 2020)
- Un **enseignement à (re)concevoir**

Qu'est-ce qui commande l'évolution ?

Recherche des prédicteurs statistiques et de leur évolution

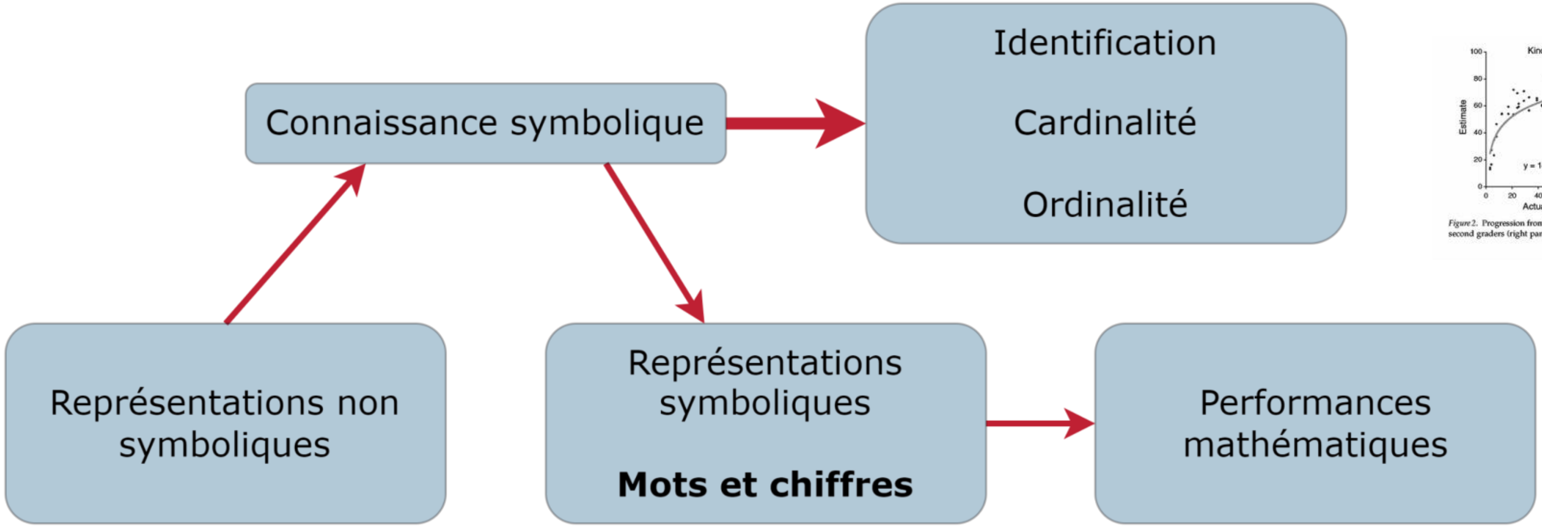
Décrire → mettre en relation → intervenir

Duncan *et al.*, 2007 ; Geary *et al.*, 2011 ; Mazzocco & Räsänen, 2013 ; Pagani *et al.*, 2010

- Les **performances mathématiques** (diverses) à un niveau donné de scolarité (T_n) sont-elles prédites par les scores obtenus antérieurement (T_1, T_2,…) à des **épreuves spécifiquement mathématiques** (comptage, comparaison de quantités, de nombres, etc.) ?
- Ces mêmes performances sont-elles prédites par des **variables cognitives générales** (langage, mémoire de travail, attention, etc.) ?
- La **croissance** des performances mathématiques ($T_n - T_1$) dépend-elle des performances antérieures **spécifiques** aux mathématiques *versus* des **capacités générales** ?
- **En intervenant sur les variables identifiées à T_1**, peut-on améliorer les **performances** mathématiques à T_n ? Modifie-t-on le **rythme de croissance** ?
- Trois approches : rechercher des corrélations, étudier l'effet de divers facteurs (analyses de régression) et mettre en place des interventions

Des descriptions aux progressions

- Plusieurs recherches conduites ou en cours visent à déterminer les composantes et **activités pertinentes pour assurer de bonnes performances ultérieures** ; elles pourraient être utilisées pour établir les programmes et progressions ⇒ **mieux connaître les déterminants des apprentissages pour mieux intervenir**
- Les plus fréquentes portent sur la période allant de 5 à 11/12 ans
  - Geary (2011) rapporte que les performances globales en fin de maternelle (GSM) expliquent 64 % de variance en CE2 ; les performances en CP ajoutent 10 % de variance (voir Fuchs *et al*., 2006)
- Les effets de groupe ne doivent pas masquer les **très fortes différences interindividuelles** (Brauening *et al*., 2021) ; les profils pourraient être mieux adaptés (Cahoon *et al*., 2021 ; Garron-Carrier, 2018)
- D’autres recherches, plus récentes, s’attachent par exemple aux fractions



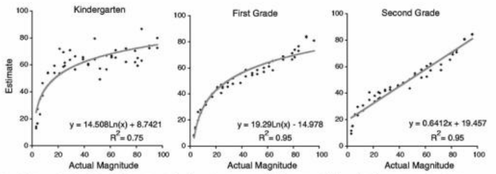
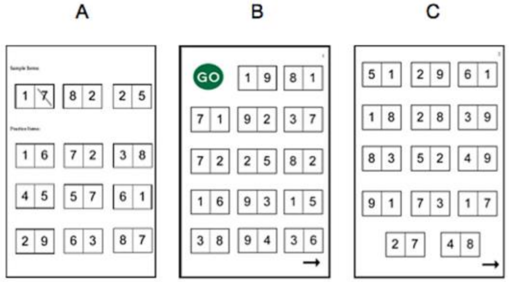
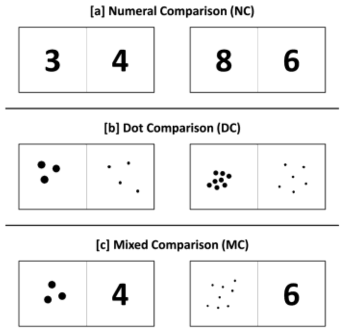
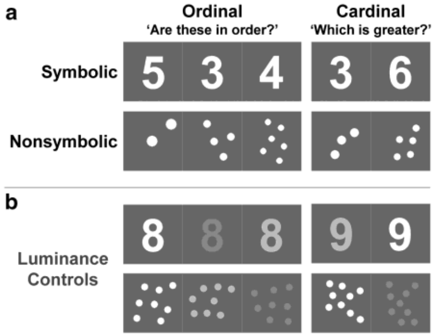


Figure 2. Progression from logarithmic pattern of median estimates among kindergartners (left panel) to linear pattern of estimates among second graders (right panel) in Experiment.







Number Pair	Ratio
1–9	0.11
1–8	0.13
1–7	0.14
1–6	0.17
1–5	0.20
2–9	0.22
2–8	0.25
2–7	0.29
3–9	0.33
3–8	0.38
2–5	0.40
3–7	0.43
4–9	0.44
3–6	0.50
4–8	0.50
5–9	0.56
4–7	0.57
3–5	0.60
5–8	0.63
2–3	0.67
5–7	0.71
6–8	0.75
7–9	0.78
4–5	0.80
5–6	0.83
6–7	0.86
7–8	0.88

Initialement c'est la **cardinalité** (« combien de ? ») qui importe (jusqu'en CP), puis l'**ordinalité** devient plus importante et prédictive (au-delà du CE1) ; rôle de la ligne numérique

O'Connor et al., 2018 ; Morsanyi et al., 2018 ; Sasanguie et al., 2018 ; Spaepen et al., 2018

Conclusion : intervenir

- Les **interventions** peuvent difficilement ne pas tenir compte des **capacités initiales des élèves**, sans doute largement universelles et qui s'enracinent dans les traitements perceptifs et moteurs
- Elles ne peuvent pas non plus se dispenser de prendre en considération les **cultures** : modes de vie, interactions sociales, relations économiques, et bien sûr langues
- La question essentielle devient celle du passage de ces deux dimensions à l'apprentissage du **système formel indo-arabe**
    - Dans un premier temps, un **code**, sa **relation aux grandeurs et quantités**
    - Dans un second temps, **l'accélération du traitement de ce code** et surtout l'apprentissage de sa **manipulation** : combinaisons de symboles (commutativité, inversion, etc.)
- En l'état, il se pourrait que ces apprentissages suivent une **trajectoire privilégiée**, relativement indépendante des cultures initiales, mais relevant de l'apprentissage explicite…
- … Et donc d'une **instruction systématique qu'il vous appartient d'élaborer en l'adaptant**